

---

[入試演習 1]

$xy$  平面において、長さが 1 である線分  $AB$  が、 $A$  を  $x$  軸上に、 $B$  を  $y$  軸上に置いて、動けるところすべてを動くものとする。

- (1)  $t$  を  $0 \leq t \leq 1$  なる定数とする。線分  $AB$  を  $(1-t):t$  に内分する点  $P$  の軌跡を求めよ。
- (2) 線分  $AB$  (両端を含む) が通過する領域を、(1) の結果を利用して求め、図示せよ。
- (3)  $s$  を  $0 < s < 1$  なる定数とする。線分  $AB$  を  $(1-s):s$  に内分する点を  $Q$  としたとき、線分  $AQ$  (両端を含む) が通過する領域を求め、図示せよ。 (日本医科大)

[入試演習 2]

平面上に三角形  $OAB$  があり, 3辺の長さは  $AB=5$ ,  $OA=6$ ,  $OB=7$  であるとする。

この三角形  $OAB$  と正の数  $t$  に対して,  $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA} + \frac{1}{t}\overrightarrow{OB}$  をみたす点  $P$  をとる。

(1)  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \boxed{\phantom{000}}$  である。

(2)  $t$  が正の数全体を動くとき,  $|\overrightarrow{OP}|$  が最小値をとるような  $t$  の値を  $t_0$  とし,  $t=t_0$  の

ときの点  $P$  を  $P_0$  とすれば  $t_0 = \frac{\sqrt{\boxed{\phantom{000}}}}{\boxed{\phantom{000}}}$ ,  $|\overrightarrow{OP_0}| = \boxed{\phantom{000}}$

である。さらに, 点  $P_0$  から直線  $OA$  に下ろした垂線を  $P_0H$  とすれば

$\overrightarrow{OH} = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}} \sqrt{\frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}}} \overrightarrow{OA}$  である。

(東京医科大)

[演習－1]

$xy$  平面上の原点  $O$  を中心とする半径  $1$  の円を  $C$  とし、この円  $C$  の外部にある点  $P(a, b)$  を考える。点  $P$  から円  $C$  に  $2$  つの接線を引き、その接点をそれぞれ  $Q, R$  とし、線分  $QR$  の中点を  $M$  とする。このとき、次の各問いに答えよ。

- (1)  $a, b$  を用いて直線  $QR$  の方程式を示せ。
- (2)  $a, b$  を用いて直線  $MP$  の方程式を示せ。
- (3)  $a, b$  を用いて点  $M$  の座標を示せ。
- (4) 点  $M$  の座標を  $(p, q)$  とするとき、点  $P$  の座標  $(a, b)$  は  $p, q$  を用いてどのように表されるか。
- (5) 円  $C$  の外部にある点  $P$  が、 $(x - y)\left(x - \frac{1}{2}\right) < 0$  を満たす範囲にあるとき、

点  $M$  の存在する範囲を図示せよ。

(兵庫医科大)

---

[演習－2]

不等式 $x^2 + y^2 \leq 2(|x| + |y|)$ の表す領域を $A$ とする。また、不等式 $|x| + |y| \leq k$   
(ただし、 $k > 0$ )の表す領域を $B$ とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $(x, y)$  平面で領域 $A$ を斜線部で図示せよ。また $A$ の面積を求めよ。
- (2)  $k=2$ のとき領域 $B$ を斜線部で図示せよ。
- (3)  $A \subset B$ となる $k$ の最小値を求めよ。
- (4)  $A \supset B$ となる $k$ の最大値を求めよ。

(関西医科大)

[演習－3]

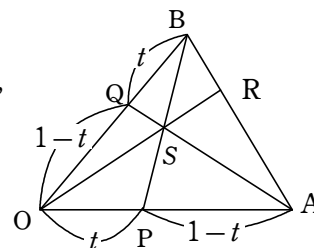
$\triangle OAB$ において辺 $OA$ を $t:1-t$ に内分する点を $P$ ,

辺 $OB$ を $1-t:t$ に内分する点を $Q$ とする。

ただし,  $0 < t < 1$  である。さらに, 線分 $AQ$ と $BP$ の交点を $S$ とし,

直線 $OS$ の延長線と辺 $AB$ の交点を $R$ とする。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  として次の問いに答えよ。



(1)  $\overrightarrow{OS}$  を  $t$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いて表せ。

(2) 点 $R$ が線分 $BA$ を $s:1-s$  ( $0 < s < 1$ ) に内分するとき,  $t$  を用いて  $s$  を表せ。

(3)  $t$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いて  $\overrightarrow{OR}$  を表せ。

(4)  $\triangle OAB$ の面積に対する $\triangle PQR$ の面積比を,  $t$  を用いて表せ。

(5) 点 $P$ , 点 $Q$ が, それぞれ辺 $OA$ と辺 $OB$ 上を動くとき, (4)で求めた比の最大値は

いくらになるか

(兵庫医科大)

---

[演習－４]

半円  $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$  がある。この円周上に相異なる2点P, Qをとり、弦PQにそって折り返したとき、円弧PQが点R( $r, 0$ ) [ $-1 \leq r \leq 1$ ] でx軸に接するようにする。

このとき、次の各問いに答えよ。

(1) 折り返した円弧が円周の一部となる円の方程式を求めよ。

(2) 直線PQの方程式を求めよ。

(3)  $r$ を用いて弦PQの長さを表せ。

(4) このような弦PQが存在する範囲を求め、図示せよ。

(兵庫医科大)

---

[入試演習 3]

$a_n = \sum_{k=1}^n k2^{n-k} \ (n=1, 2, \dots)$  とおく。

- (1) 和  $a_n$  を求めよ。  
 (2) 数列  $\{a_n\}$  を次のように4個ずつの群に分ける：

$$|a_1, a_2, a_3, a_4 \mid a_5, a_6, a_7, a_8| \cdots$$

このとき、各群の2つ目の項以外の3数は、5で割ったときの余りが等しいことを示せ。

(大阪医科大)

[入試演習 4]

半径 1 の円  $O$  と半径 1 の円  $O_1$  が外接しており、

さらに 2 つの円はともに直線  $l$  に接している。

いま図 1 のように、円  $O_2$  は、円  $O$  と円  $O_1$  の

両方に外接し、かつ、直線  $l$  にも接している。

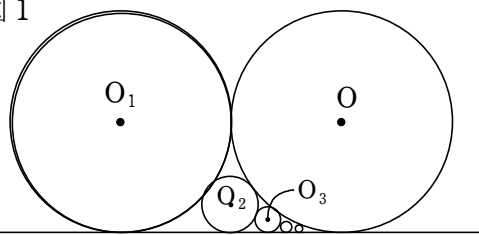
以下、 $n=2, 3, \dots$  に対して、円  $O_{n+1}$  を円  $O$  と

円  $O_n$  の両方に外接し、かつ、直線  $l$  にも接して

いるように作っていくとする。

$l$

図 1



円  $O_n$  の半径を  $r_n$  で表すとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) 円  $O$ ,  $O_n$  および  $O_{n+1}$  と直線  $l$  との接点を、

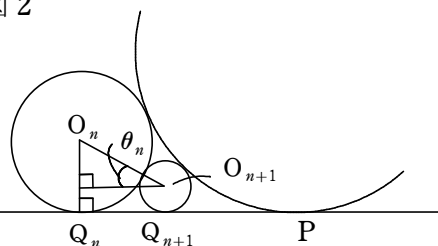
図 2

それぞれ、 $P$ ,  $Q_n$  および  $Q_{n+1}$  とする(図 2 を参照)。

このとき、 $Q_n Q_{n+1}$ ,  $Q_n P$  および  $Q_{n+1} P$  を、

それぞれ、 $r_n$ ,  $r_{n+1}$  を用いて表しなさい。

$l$



- (2)  $r_n$  を  $n$  の式で表しなさい。

- (3) 2点  $O_n$  と  $O_{n+1}$  を通る直線と直線  $l$  とのなす角を  $\theta_n$  で表す(図 2 を参照)。

ただし、 $0 \leq \theta_n < \frac{\pi}{2}$  とする。このとき  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \theta_n}{\cos \theta_n}$  を求めなさい。(日本大一医)



---

[演習－１]

数列 $-1^3, 2^3, -3^3, 4^3, -5^3, 6^3, \dots$ について、以下の設問に答えよ。

- (1) この数列の一般項 $a_n$ を求めよ。
- (2) 初項 $a_1$ から第 $n$ 項 $a_n$ までの和を $S_n$ とする。このとき、 $n$ が偶数の場合と奇数の場合  
にわけて $S_n$ を求めよ。
- (3)  $m$ を自然数とする。 $S_{2m}$ と $S_{2m-1}$ の間に次の関係式が成り立つとき、 $m$ を求めよ。

$$\frac{S_{2m} - S_{2m-1}}{S_{2m} + S_{2m-1}} = 20 \quad \text{(岩手医科大)}$$

[演習－2]

$\sqrt{n}$  を小数点以下第一位で四捨五入した整数を  $a_n$  とする数列  $\{a_n\}$  を考える。

(1)  $a_{150} = \boxed{\phantom{000}}$

(2)  $6 \leq a_n \leq 7$  のとき  $\boxed{\phantom{000}} \leq n \leq \boxed{\phantom{000}}$  である。一般に正の整数  $k$  について、

$a_n = k$  となるのは第  $\boxed{\phantom{000}}$  項から第  $\boxed{\phantom{000}}$  項までである。

(3)  $\sum_{i=1}^n a_i \geq 1000$  となる最小の  $n$  において  $a_n = \boxed{\phantom{000}}$  であり、 $n = \boxed{\phantom{000}}$  である。

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \boxed{\phantom{000}}$

(東海大一医)

[演習－3]

正の整数  $n$  に対し、 $n$  以下の正の整数のうち、3 で割り切れるものの個数を  $a_n$ 、3 または 7 で割り切れるものの個数を  $b_n$ 、3 または 7 で割り切れるものの総和を  $S_n$  とする。

たとえば、 $a_{100} = \boxed{\phantom{000}}$ 、 $b_{100} = \boxed{\phantom{000}}$ 、 $S_{100} = \boxed{\phantom{000}}$  である。

$n$  が限りなく大きくなるとき、 $\frac{a_n}{n}$  は  $\boxed{\phantom{000}}$  に収束し、 $\frac{b_n}{n}$  は  $\boxed{\phantom{000}}$  に収束する。また、

$n$  が限りなく大きくなるとき、 $\frac{S_n}{n^c}$  が正の数に収束するような定数  $c$  の値は  $\boxed{\phantom{000}}$  であり、

$c$  をこのように定めると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^c} = \boxed{\phantom{000}}$  となる。 (日本医科大)

[入試演習 5]

$a, b, c$  を実数の定数とする。 $i = \sqrt{-1}$  を虚数単位として、複素数  $z$  を未知数とする方程式  $F(z) = z^3 + aiz^2 + bz + ci = 0$  の解のいくつかの性質に関して次の問に答えなさい。

- (1)  $z = \alpha$  が  $F(z) = 0$  の解ならば、 $z = -\bar{\alpha}$  も  $F(z) = 0$  の解であることを証明しなさい。  
ただし、 $\bar{\alpha}$  は  $\alpha$  の共役複素数とする。 $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ ,  $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$  は用いてよい。
- (2)  $z = r$  が  $F(z) = 0$  の 1 つの解で、 $r$  が実数であるとする。 $c \neq 0$  とするとき、 $z = -r$ ,  $-ai$  も  $F(z) = 0$  の解であることを証明しなさい。
- (3) 実数を係数とする 3 次方程式は、少なくとも 1 つ実数解を持つことを用いて、方程式  $F(z) = 0$  は少なくとも 1 つの純虚数の解をもつことを証明しなさい。
- (4) 問(3) を用いて、方程式  $z^3 + iz^2 + z + 10i = 0$  の 3 つの解を求めなさい。

(慶應義塾大一医)

[入試演習 6]

(A)  $a_1, a_2, a_3$  を整数とし、 $f(x)$  を  $x^3$  の係数が1である整式  $f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$  とする。

定理「方程式  $f(x) = 0$  ……① が有理数の解をもてば、それは整数である」を証明する。

方程式  $f(x) = 0$  が有理数解  $x = \frac{t}{s}$  ( $s, t$  は整数,  $s > 0, t \neq 0$ )

をもつとする。必要なら約分して  $s$  と  $t$  の最大公約数は  $\square$  と仮定してよい。

これを①へ代入して整理すると、等式  $-\square = \square(a_1t^2 + a_2st + a_3s^2)$  ……②

を得る。

もし  $s \neq 1$  ならば、ある素数  $p$  が  $s$  の因数となる。すると②により  $p$  は  $t$  の素因数でなければならない。これは  $\square$  と矛盾する。ゆえに  $s = \square$  である。

したがって、①の有理数解はじつは整数である。

(B)  $\theta = \frac{2\pi}{9}$  (ラジアン),  $\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$  とする。ただし、 $i^2 = -1$  である。

$\beta = \alpha + \alpha^8$  とするとき、 $\beta$  は有理数でない実数であることを示したい。

(1)  $\beta$  は実数であることを示せ。

(2)  $\beta$  はある整数係数の三次方程式の解である。その方程式  $f(x) = 0$  を求めよ。

ただし、整式  $f(x)$  は  $x^3$  の係数を1として表せ。

(3) (2)で求めた三次方程式は有理数の解をもたない。このことを、関数  $y = f(x)$  のグラフを考えることによって示せ。必要なら(A)で述べられている定理を用いてよい。

(東京慈恵会医科大)

[演習－１]

以下の各問に答えよ。ただし $\pi$ は円周率を表す。

(1) 複素数  $z$  を  $z = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$  とする。このとき、 $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)$

の値を求めよ。

(2) 絶対値 1, 偏角  $2\theta$  ( $0 \leq \theta < \pi$ ) の複素数  $w$  に対して  $r = |1-w|$  とおくと、 $\sin \theta$  を  $r$  を用いて表せ。

(3)  $\sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} \sin \frac{3\pi}{5} \sin \frac{4\pi}{5}$  の値を求めよ。 (東京医科歯科大)

---

[演習－２]

$a$  が実数の範囲で変化するとき、 $z$  の方程式  $z^3 + (1 - a^2)z - a = 0$  の解全体が複素数平面上において描く図形を図示せよ。

（東邦大一医）

---

**[演習－3]**

複素数  $z$  が複素数平面上の4点  $z=0$ ,  $z=1$ ,  $z=1+i$ ,  $z=i$  ( $i$  は虚数単位) を頂点とする正方形の周上を動くとき,  $z^2$  がこの平面上で描く図形の囲む面積を求めよ。

(東京女子医大)



[入試演習 7]

$x$  軸は水平方向,  $y$  軸は鉛直方向を向いているとし  $x$  軸,  $y$  軸の 1 目盛りは 1 cm であると

する。式  $y = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^2 + 3 & (0 \leq x \leq 3) \\ 9\log \frac{x}{3} & (3 \leq x \leq 3e) \end{cases}$  で表される  $xy$  平面上の曲線を  $y$  軸のまわりに回

転させてできる容器に毎秒  $9\text{cm}^3$  の割合で水をそそぐ。ここで,  $\log$  は自然対数を表す。また,  $e$  は自然対数の底とする。次の各問に答えよ。

(1) 水深  $h$  cm がつぎのそれぞれの範囲にあるとき, 容器内の水量  $V\text{cm}^3$  を  $h$  で表せ。

(a)  $0 \leq h \leq 3$       (b)  $3 \leq h \leq 9$

(2)  $h = 2$  となる瞬間における水面の上昇速度  $v$  cm/秒 を求めよ。

(3) 水をそそぎ始めてから  $t$  秒後の水面の上昇速度  $v$  cm/秒とする。  $3 < h < 9$  のとき,  $v$  を  $t$  で表せ。(昭和大一医)

〔入試演習 8〕

次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n + \frac{1}{2}} + \frac{1}{n + \frac{2}{2}} + \frac{1}{n + \frac{3}{2}} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n + \frac{1}{2}} + \frac{1}{n + \frac{3}{2}} + \frac{1}{n + \frac{5}{2}} + \cdots + \frac{2}{6n - 1} \right)$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left\{ \left( 1 + \sin \frac{n\pi}{2n} \right)^{\sin \frac{n\pi}{n}} \left( 1 + \sin \frac{(n+1)\pi}{2n} \right)^{\sin \frac{(n+1)\pi}{n}} \left( 1 + \sin \frac{(n+2)\pi}{2n} \right)^{\sin \frac{(n+2)\pi}{n}} \cdots (1 + \sin \pi)^{\sin 2\pi} \right\}^{\frac{1}{n}} \right)$$

（日本医科大）

〔演習－１〕

体内に発生する腫瘍の発育を考える。腫瘍は完全な球形であるとし、体積を  $V$  ( $\text{cm}^3$ ), 表面積を  $S$  ( $\text{cm}^2$ ), 半径を  $r$  ( $\text{cm}$ ) で表す。

時刻  $t$  (年) で表し、腫瘍の発育速度を  $\frac{dV}{dt}$  と定める。

また、腫瘍の体積が  $2\text{cm}^3$  を超えると医学検査で検出可能となり、 $8\text{cm}^3$  を超えると治療が不可能となるものとする。

腫瘍の体積が  $2\text{cm}^3$  から  $8\text{cm}^3$  まで発育するのに要する時間を  $T$  とする。

(1) 発育速度が  $1\text{cm}^3/\text{年}$  で一定とする。腫瘍の半径が  $1\text{cm}$  になった時点における、

表面積と半径の増加速度、 $\frac{dS}{dt}$  ( $\text{cm}^2/\text{年}$ ) および  $\frac{dr}{dt}$  ( $\text{cm}/\text{年}$ ) をそれぞれ求めよ。

(2) 腫瘍が発生した時刻を  $0$  とするとき、時刻  $t$  (年) における発育速度が  $\frac{dV}{dt} = at$  ( $\text{cm}^3/\text{年}$ )

で表されるとする。( $a > 0$  は定数である。) 腫瘍の半径が  $1\text{cm}$  になった時点における、

表面積と半径の増加速度、 $\frac{dS}{dt}$  ( $\text{cm}^2/\text{年}$ ) および  $\frac{dr}{dt}$  ( $\text{cm}/\text{年}$ ) をそれぞれ求めよ。

(3) 発育速度がそれぞれ(1), (2)であるような2つの腫瘍AとBが、時刻  $t=0$  に同時に発生したとする。

(i) 腫瘍Aの体積が腫瘍Bの体積を上回っている時刻  $t$  (年) の範囲を求めよ。

(ii) 腫瘍Bについて  $T$  (年) の値を求めよ。

(iii) 1年に一度定期的に医学検査を受けるとする。治療が可能うちに腫瘍Bが検出できるのは、 $a$  ( $\text{cm}^3/\text{年}^2$ ) の値がどの範囲にあるときか。 (昭和大一医)

---

[演習－２]

底面の半径が $a$ ，深さが $a$ の直円錐状の容器があり，水が一杯に入っている。この容器に，半径 $r$ の鉄球を静かに沈める。 $(\sqrt{2}-1)a \leq r \leq \sqrt{2}a$ の範囲で，あふれる水の量が最大となる $r$ を求めたい。以下の各問に答えよ。

- (1) 鉄球の水面下に沈んでいる部分の深さ（水面から球の底までの長さ） $h$ を， $r$ と $a$ を用いて表せ。
- (2) 水面下に沈んでいる部分の鉄球の体積 $V$ を $r$ と $h$ を用いて表せ。
- (3) あふれる水の量が最大となる $r$ を求めよ。 （東邦大－医）

---

[演習－3]

(1)  $0 \leq x \leq 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$  に対して,  $\left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} - \frac{1}{1+x^2} \right| \leq x^{2n}$  を証明せよ。

(2)  $x = \tan y$  において,  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$  を計算せよ。

(3) 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right\}$  があることを証明し,

値を計算せよ。

(大阪医科大一医)

[演習－４]

$a$  を正の定数とし、 $f(x) = e^{-\frac{x}{a}} \sin ax$  ( $x \geq 0$ ) と定義する。

このとき、以下の設問に答えなさい。

- (1)  $f(x) = 0$  となる  $x$  を小さい順に  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, \dots$  とすると、

$$x_m = \boxed{\phantom{000}} \text{ である。}$$

- (2) (1)の  $x_0, x_1, x_2, \dots$  からつくられる各区間  $[x_{k-1}, x_k]$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) において  $f(x)$

$$\text{の定積分 } S_k \text{ を求めると、 } S_k = \boxed{\phantom{000}} \text{ である。}$$

- (3)  $S_1$  を初項、 $S_k$  を第  $k$  項とする無限級数の第  $n$  項までの部分和を  $W_n$  とすると、

$$W_n = \boxed{\phantom{000}} \text{ で、さらに、 } \lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \boxed{\phantom{000}} \text{ である。} \quad (\text{聖マリアンナ医科大学})$$

[入試演習 9]

$t < 3$ ,  $t \neq 1$  である  $t$  に対応して,  $\frac{x^2}{3-t} + \frac{y^2}{1-t} = 1$  によって表される  $xy$  平面上の曲線  $C_t$

を考える。 $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  として平面上の定点  $A(a, b)$  をとる。

- (1)  $C_t$  が点  $A$  を通るような  $t$  は 2 つあることを証明せよ。
- (2) 上の 2 つの  $t$  を  $t_1$ ,  $t_2$  とするとき, 曲線  $C_{t_1}$ ,  $C_{t_2}$  の点のうち 1 つは楕円で他の 1 つは双曲線であることを証明せよ。
- (3) (2) の 2 曲線  $C_{t_1}$ ,  $C_{t_2}$  の点  $A$  における 2 つの接線は直交することを証明せよ。

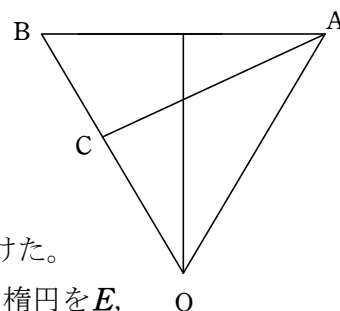
(大阪医科大)

[入試演習 10]

底面の半径2，高さ4の円錐形の内面をもつ容器を考える。

底面を上にして容器を垂直に立てて水を満たしたとき，

水の体積は  $\frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}} \pi$  になる。底面の一つの直径を  $AB$ ，



円錐の頂点を  $O$  としたとき， $OB$  が鉛直となるように静かに傾けた。

このとき残る水の量を求めたい。傾けたときに水面の縁となる楕円を  $E$ ，  $O$

$OB$  と楕円  $E$  の交点を  $C$  とする。

初めの位置で，頂点  $O$  を原点，頂点を含み底面に平行な平面を  $xy$  平面， $O$  を通る鉛直線を上向きに  $z$  軸， $BA$  に平行な直線を  $x$  軸とし， $A$  の  $x$  座標が正となるように座標系を定める。

以下、この座標系で考える。

容器内面の円錐の方程式は  $x^2 + y^2 = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}} z^2$  となる。また， $A$  の座標は

$(\boxed{\phantom{000}}, 0, \boxed{\phantom{000}})$ ， $C$  の座標は  $(\frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}}, 0, \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}})$ ，楕円  $E$  上の点は  $z = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}} x$

+  $\boxed{\phantom{000}}$  を満たす。楕円  $E$  の長軸の長さは  $\frac{\boxed{\phantom{000}} \sqrt{\boxed{\phantom{000}}}}{\boxed{\phantom{000}}}$ ，

短軸の長さは  $\frac{\boxed{\phantom{000}} \sqrt{\boxed{\phantom{000}}}}{\boxed{\phantom{000}}}$ ， $OC$  は  $\frac{\boxed{\phantom{000}} \sqrt{\boxed{\phantom{000}}}}{\boxed{\phantom{000}}}$  となる。

したがって，残る水の量は  $\frac{\boxed{\phantom{000}} \sqrt{\boxed{\phantom{000}}}}{\boxed{\phantom{000}}} \pi$  である。

(順天堂大一医)



[演習－1]

式  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$  で表される楕円を  $F$  とする。

- (1) 座標平面上の点  $A(1, 2)$  を通る、傾き  $k$  の直線は

$$y = k(x - \boxed{\phantom{00}}) + \boxed{\phantom{00}}$$

と表せる。この直線が楕円  $F$  に接するとき、接線の傾き  $k$  に対し、次式が成り立つ。

$$k^2 + \boxed{\phantom{00}}k - \boxed{\phantom{00}} = 0$$

点  $A$  から楕円  $F$  に引いた2つの接線のなす角は  $\frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}} \pi$  である。

これらの接線と楕円  $F$  の接点を  $B, C$  とし、 $\angle BAC$  の二等分線の傾きを  $\tan \alpha$  とすると、

$$\tan 2\alpha = \boxed{\phantom{00}} \text{ が成り立つ。}$$

- (2) 楕円  $F$  の外部にある点  $P$  から  $F$  に引いた2つの接線の接点を  $Q, R$  とする。 $\angle QPR$  の

二等分線の傾きが1であるとき、点  $P$  は  $\boxed{\phantom{00}}x^2 + y^{\boxed{\phantom{00}}} = 1$  で表される  $\boxed{*}$  上

にある。（\*には以下の①～⑤のうちからあてはまるものを1つ選べ。）

- ① 直線      ② 円周      ③ 楕円      ④ 双曲線      ⑤ 放物線      （杏林大一医）

〔演習－２〕

座標平面の原点 $O(0,0)$ を通る楕円 $C_1:4x^2+9(y-3)^2=81$ を考える。

- (1) 放物線 $C_2:y=ax^2(a>0)$ と楕円 $C_1$ の共有点が原点 $O$ のみであるような $a$ の最大値

を $a_1$ とすれば  $a_1 = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}}$  である。

- (2) 円 $C_3:x^2+y^2=r^2(r>0)$ と楕円 $C_1$ が共有点をもつような $r$ の最大値を $r_1$ とすれば

$r_1 = \frac{\boxed{\phantom{000}}\sqrt{\boxed{\phantom{000}}}}{\boxed{\phantom{000}}}$  である。

(東京医科大)

[演習－3]

楕円  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$  について以下の設問に答えよ。

(1) 原点  $O$  を極として、この楕円の極方程式を求めよ。

(2) 楕円上の2点  $A$  と  $B$  が  $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$  であるように動くとき、 $M = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$  の値を求めよ。

(3) 4点  $P, Q, R, S$  がこの順で楕円上に時計回りに並んでいて、線分  $PR$  と線分  $QS$  は原点  $O$  を交点として直交する。原点  $O$  を極とする点  $P$  の極座標を  $(r, \theta)$  とし、 $L = OP^2 + OQ^2 + OR^2 + OS^2$  とするとき、 $L$  を  $\theta$  の式で表せ。さらに、 $L$  の最大値と最小値およびそれらをあたえる  $\theta$  の値を求めよ、ただし、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  とせよ。

(岩手医科大)

[入試演習 11]

数字  $1, 2, \dots, n$  が 1 つずつ書かれている  $n$  個の玉と、区別のつかない  $k$  個の箱がある。  
ここで  $1 \leq k \leq n$  とする。このとき、空の箱が生じない玉の入れ方の総数を  ${}_nS_k$  で表す。  
以下のように、 ${}_nS_k$  のいくつかの値とその漸化式を求めてみよう。

- (1) まず、 $k=n$  および  $k=1$  の場合はそれぞれ、 ${}_nS_n = \boxed{\phantom{000}}$  ,  ${}_nS_1 = \boxed{\phantom{000}}$  である。
- (2) 次に、 $k=n-1$  の場合を考える。このときは、箱の数が玉の数より 1 つ少ないので、玉が 2 つ入る箱ができる。そこで、求めるものは  $n$  個の玉から 2 つの玉を選ぶ仕方の総数と同じであるから、 ${}_nS_{n-1} = \boxed{\phantom{000}}$  となる。
- (3) さらに、 $k=2$  の場合は、玉  $n$  (数字  $n$  が書かれている玉) を先にどれかの箱に入れる。すると残った  $n-1$  個の玉については、それぞれ玉  $n$  の入っている箱に入れるか入れないかの 2 通りの場合が生ずる。  
ゆえに、これらの  $n-1$  個の玉を 2 つの箱に入れる仕方の総数は  $\boxed{\phantom{000}}$  であるが、  
このうち空の箱ができる場合を除くので、 ${}_nS_2 = \boxed{\phantom{000}}$  と求められる。
- (4) 今度は  ${}_5S_3$  を求めてみよう。このとき玉 5 に注目すると次の 2 つの場合のどれかが起きる。第 1 の場合は、玉 5 を先に 1 つの箱に入れた後、残った 4 つの玉を、玉 5 の入っていない残りの 2 つの箱に入れる場合である。その仕方の総数は  ${}_4S_2 = \boxed{\phantom{000}}$  である。  
第 2 の場合は、玉 5 以外の 4 つの玉を 3 つの箱に入れた後、玉 5 をそれらの箱のどれかに入れる場合であり、その仕方の総数は  $3 \times {}_4S_3 = \boxed{\phantom{000}}$  である。この 2 つの場合は互いに排反なので、 ${}_5S_3 = 3 \times {}_4S_3 + {}_4S_2 = \boxed{\phantom{000}}$  が得られる。
- (5) (4) の方法を一般化すると漸化式  ${}_nS_k = k \times \boxed{\phantom{000}} + \boxed{\phantom{000}}$  が得られる。
- (6) (5) を用いると、例えば  ${}_6S_4 = \boxed{\phantom{000}}$  と計算できる。 (金沢医科大学)

[入試演習 12]

数直線上の点の集合  $S = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$  を考え、点  $-1$  上と点  $1$  上にそれぞれ球を 1 個ずつ置き、他の点上には何も置かないものとする。いま次の操作を何回か繰り返す。

$S$  上にある各球を互いに独立に、確率  $\frac{1}{2}$  ずつで数直線上の正の方向か負の方向に 1 だけ同時に動かす。ただし、同時に同じ点上を占めた 2 個の球については 2 球とも  $S$  上から取り除くものとし、点  $-3$  上あるいは点  $3$  上を占めた球についてはその球を  $S$  上から取り除くものとする。

以下、 $n, m$  を自然数とする。

(1) 1 回目の操作を終えたとき、 $S$  上に球が 2 個存在している確率は  である。

(2) 2 回目の操作を終えたとき、 $S$  上に球が 2 個存在している確率は  ,

$S$  上に球が 1 個だけ存在している確率は  である。また、2 回目の操作において  $S$  上にある 2 個の球が初めて同時に同じ点上を占めたことにより  $S$  上から取り除かれる確率は  である。

(3)  $n$  回目の操作を終えたとき、 $S$  上に球が 2 個存在している確率  $P_n$  を求めると、

$P_{2m-1} = \text{}$  ,  $P_{2m} = \text{}$  である。

(4)  $n$  回目の操作を終えるまでに、 $S$  上にある 2 個の球が同時に同じ点上を占めることにより  $S$  上から取り除かれる確率を求めなさい。(慶應義塾大一医)

---

〔演習－１〕

大小2つのサイコロを投げて、出た目の数をそれぞれ $a, b$ とする。 $x, y$ に関する連立方程式  $2x + y = 2$ ,  $ax + by = 3$  について次の各問いに答えよ。

- (1) 解をもたない確率を求めよ。
- (2) 2組以上の解をもつ確率を求めよ。
- (3) ただ1組の解をもち、 $x, y$ ともに正となる確率を求めよ。 (杏林大一医)

---

[演習－2]

$n$  を 3 以上の自然数とする。このとき、正  $2n$  角形の頂点から無作為に異なる 4 つの頂点を選び、それぞれ  $A, B, C, D$  とする。以下の問いに答えよ。

(1)  $\triangle ABC$  が直角三角形である確率を求めよ。

(2)  $A, B, C, D$  から 3 つの頂点を選んで得られるすべての三角形の集合を考える。

その集合の少なくとも 1 つの要素が直角三角形である確率を求めよ。

(3)  $\triangle ABC$  が鈍角三角形である確率を  $P_n$  とする。 $n$  を限りなく大きくするとき、 $P_n$  の

極限值を求めよ。

(産業医科大)

[演習－3]

ある疾病Aを検出する医学検査Bを考える。Bには陽性と陰性の2通りの結果だけがある。疾病Aの患者がこの検査Bを受けたとき陽性になる確率は $a$  ( $0 < a \leq 1$ ) であり、健康者(Aの患者でないもの)がBを受けたとき陽性になる確率は $b$  ( $0 < b \leq 1$ ) である。ある集団Xにおいて、疾病Aの患者がしめる割合を $p$  ( $0 < p \leq 1$ ) とする。この集団から無作為に1人を抽出した。以下の問に答えよ。

- (1) 抽出された人が検査Bを受けたとき陽性になる確率を求めよ。
- (2) 抽出された人が検査Bで陽性であったとき、その人が疾病Aの患者である確率 $d_+$ を $p$ の式で表せ。
- (3) 抽出された人が検査Bで陰性であったとき、その人が疾病Aの患者である確率 $d_-$ を $p$ の式で表せ。
- (4) 検査Bは、疾病Aの患者が受ければ必ず陽性に出て、健康者(Aの患者でないもの)が受ければ30人に1人の割合で陽性に出るものとする。また、集団Xでは疾病Aの患者が100人に1人の割合で存在すると仮定する。このとき、 $d_+$ の値を四捨五入により小数第2位まで求めよ。

- (5)  $d_+$ が0.5以上となるためには $\frac{a}{b}$ はどのような範囲になければならないか。

$p$ を用いた不等式により表せ。

(昭和大一医)



〔演習－４〕

四角形の4つの頂点に1, 2, 3, 4と時計まわりに番号がつけられている。

時刻0において、この四角形の頂点1と頂点3の上をそれぞれ1つずつの粒子が占めているとし、頂点2と頂点4の上には粒子は存在しないものとする。(図1を参照のこと)

その後、1秒ごとに、存在する粒子の中で最小の番号の頂点上を占める粒子が、確率 $\frac{1}{2}$

で消滅し、確率 $\frac{1}{4}$ ずつで隣り合う2つの頂点のいずれかに移動する。ただし、移動した

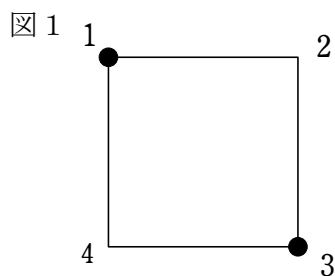
頂点上をすでに他の粒子が占めている場合は、その粒子と合体して1つの粒子になるものとする。

以下、 $n, m$ を自然数とする。

時刻 $n$ (秒)において、この四角形の4つの頂点のうち1つの頂点上にのみ粒子が存在する確率を $P_n$ で表し、4つの頂点のいずれの上にも粒子が存在しない確率を $Q_n$ で表す。

(1)  $P_2 = \boxed{\phantom{00}}$ ,  $Q_2 = \boxed{\phantom{00}}$  である。

(2) 一般に、 $P_{2m-1} = \boxed{\phantom{00}}$ ,  $P_{2m} = \boxed{\phantom{00}}$  であり、 $Q_{2m-1} = \boxed{\phantom{00}}$ ,  $Q_{2m} = \boxed{\phantom{00}}$  である。



(慶應義塾大一医)

---

[演習－5]

A氏、B氏はそれぞれ1から4までの番号が1つずつ書いてある4枚のカードを持っている。

1枚ずつカードを出し合い、次の回には残りのカードから1枚ずつ出し合う。

- (1) 1回目にカードの番号が同じになる確率を求めよ。
- (2) 2回目に初めてカードの番号が同じになる確率を求めよ。
- (3) 3回目に初めてカードの番号が同じになる確率を求めよ。
- (4) 4回目に初めてカードの番号が同じになる確率を求めよ。 (北里大一医)

[入試演習 13]

1 辺の長さが 1 の正十二面体を考える。

点  $O, A, B, C, D, E, F$  を図に示す正十二面体の

頂点とし、 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}$  とおくとき、

以下の問いに答えよ。

なお、正十二面体では、すべての面は合同な正五角形

であり、各頂点は 3 つの正五角形に共有されている。

- (1) 1 辺の長さが 1 の正五角形の対角線の長さを求め

て、内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  を求めよ。

- (2)  $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{OF}$  を  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  を用いて表せ。

- (3)  $O$  から平面  $ABD$  に垂線  $OH$  を下ろす。 $\overrightarrow{OH}$  を  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  を用いて表せ。

さらにその長さを求めよ。

(福井大一医)

[入試演習 14]

座標空間内で点  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(2, 2, 0)$ ,  $C(0, 2, 0)$ ,  $D(0, 0, 2)$ ,  $E(2, 0, 2)$ ,  $F(2, 2, 2)$ ,  $G(0, 2, 2)$  を頂点とする1辺の長さ2の立方体(表面および内部)を  $K$  とする。

また,  $t > 0$  として3点  $P(2t, 0, 0)$ ,  $Q(0, 2t, 0)$ ,  $R(0, 0, t)$  を頂点とする三角形(周および内部)を  $T$  とする。  $K$  と  $T$  の共通部分を  $L$  として,  $L$  の面積を  $S(t)$  とする。

(1)  $0 < t \leq 1$  のとき,  $S(t)$  を求めよ。

(2)  $L$  が三角形, 四角形, 五角形となる  $t$  の範囲をそれぞれ  $I_3, I_4, I_5$  とする。

$I_3, I_4, I_5$  を求めよ。

(3)  $1 < t \leq 2$  のとき,  $AB$  と  $PQ$  の交点の座標および  $AE$  と  $PR$  の交点の座標を求めよ。

(4)  $t$  が(2)の  $I_3 \cup I_4 \cup I_5$  の範囲にあるときの,  $u = S(t)$  のグラフの概形を  $tu$  平面に描け。

(大阪医科大)

---

**〔演習－１〕**

一辺の長さが１の正二十面体の１つの面を $\triangle ABC$ とする、さらに外接球の中心を $O$ とする。すなわちこの正二十面体の１２個の頂点は中心を $O$ とする１つの球の上にある。

次の問いに答えなさい。

- (1) ３点 $A$ ， $B$ ， $O$ を通る平面でこの正二十面体を切ったとき，切り口として得られる六角形の面積を求めなさい。
- (2)  $O$ から $\triangle ABC$ に下ろした垂線の足を $D$ とすると、線分 $OD$ の長さを求めなさい。

（産業医科大）

〔演習－２〕

図のような一辺の長さが１の立方体 $ABCD-EFGH$ において、点 $P$ 、 $Q$ 、 $R$ は辺 $AB$ 、 $AD$ 、 $FG$ 上の点で、 $AP:AQ:GR=2:2:1$ を満たしている。

$AP=x$ とおき、 $\overrightarrow{EA}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{EF}=\vec{b}$ 、 $\overrightarrow{EH}=\vec{c}$ とおく。

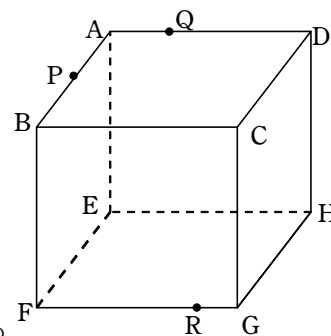
以下の問いに答えなさい。

- (1)  $\overrightarrow{PR}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ および $x$ を用いて表しなさい。
- (2)  $0 < x \leq 1$ とする。辺 $BF$ 上に点 $S$ を、３点 $P$ 、 $Q$ 、 $R$ が定める

平面 $\alpha$ 上に $S$ があるように選ぶ。このとき $\overrightarrow{PS}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ および $x$ を用いて表しなさい。

- (3)  $0 < x \leq 1$ とする。この立体を(2)の平面 $\alpha$ で切った切り口の図形の周の長さを $L$ とする。 $L$ が最小となるときの $x$ の値とそのときの $L$ の値を求めなさい。

（日本大一医）



---

[演習－3]

- (1) 空間において、球面  $S: x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{2}$  を平面  $P: x + y + z = \sqrt{3}$  で切ってできる切り口の円を  $C$  とする。円  $C$  を含む平面に原点  $O$  から下ろした垂線の足を  $H$  とする。 $OH$  の長さ、円  $C$  の半径を求めよ。
- (2) (1)の球面  $S$  の内部で、3つの座標平面および平面  $P$  で囲まれた四面体の内部に含まれる部分の体積を求めよ。 (昭和大一医)

---

[演習－４]

$xyz$  座標空間において、原点を  $O$  とし、3点  $A(6, 0, 0)$ ,  $B(0, 6, 0)$ ,  $C(0, 0, 6)$  をとる。  
 $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  を辺にもつ立方体を  $K$  とし、3点  $C$ ,  $D(0, 6, 2)$ ,  $E(3, 6, 0)$  を通る平面  
 を  $\alpha$  とする。このとき、立方体  $K$  の内部にある平面  $\alpha$  の部分の面積を求めよ。

（京都府立医大）



---

[入試演習 15]

自然数  $k$  を  $2$  の累乗と奇数の積として  $k=2^am$  ( $a$  は  $2$  の累乗の指数,  $m$  は奇数) と表すとき,  $f(k)=a$  と定める。 $S_n=\sum_{k=1}^n f(k)$  とするとき

(1)  $S_{50}$  を求めよ。

(2)  $n$  が  $2$  の累乗のとき  $S_n$  を  $n$  の式で表せ。

(3)  $\frac{n-1}{2} \leq S_n < n$  であることを示せ。

(群馬大一医)

---

[入試演習 16]

以下の問いに答えよ。

- (1) 3つの正の実数 $x, y, z$ が $x+y+z=10$ を満たすとき、点 $(x, y)$ の動く範囲を図示せよ。  
また、これらの点のうち、 $x, y$ がともに整数であるものは全部でいくつあるか答えよ。
- (2)  $a$ を正の定数とする、3つの正の実数 $x, y, z$ が $x+y+z=a$ を満たし、さらに $x, y, z$ を3辺の長さとする三角形が存在するとき、点 $(x, y)$ の動く範囲を図示せよ。
- (3)  $n$ を自然数とする。 $x+y+z$ が $2n$ 以下の偶数であり、さらに $x, y, z$ を3辺の長さとする三角形が存在するような3つの自然数 $x, y, z$ の組 $(x, y, z)$ は全部でいくつあるか。  
 $n$ を用いて答えよ。 (北里大一医)

---

[演習－１]

関数  $f(x) = 2[x] - [2x]$  ( $-2 \leq x \leq 2$ ) について、次の問いに答えよ。ただし、 $[x]$  は  $x$  を超えない最大の整数を表す。

- (1)  $f(1.3)$  の値を求めよ。
- (2)  $f(-1.3)$  の値を求めよ。
- (3)  $y = f(x)$  ( $-2 \leq x \leq 2$ ) のグラフをかけ。
- (4)  $y = f(x)$  と  $y = 3x + b$  との交点の個数を求めよ。ただし、 $-3 \leq b \leq 0$  とする。

（関西医科大）

〔演習－２〕

自然数 $m$ の正の約数の総和を $S(m)$ で表す。たとえば、 $S(10)=1+2+5+10=18$ である。

(1)  $p$ を素数、 $n$ を自然数とすると、 $S(p^n)=\frac{\boxed{\phantom{000}}}{p-1}$ となる。

(2) 自然数 $a, b$ の最大公約数が1のとき、 $S(ab)$ は $S(a)$ と $S(b)$ を用いて表され

$S(ab)=\boxed{\phantom{000}}$ となる。

(3)  $n$ を自然数とし、 $2^{n+1}-1$ が素数のとき、 $m=2^n(2^{n+1}-1)$ とおく。

$S(m)$ を $m$ を用いて表すと  $S(m)=\boxed{\phantom{000}}$ である。

(4)  $i, j$ を自然数とすると、 $m=2^i3^j5$ の形をしていて、 $S(m)=3m$ となる最小の $m$ は

$\boxed{\phantom{000}}$ である。

(東海大一医)

〔演習－３〕

$p$  が素数のとき、 $p^a$  ( $a$  は正の整数) の正の約数の個数は  であり、正の約数すべての積は  $p$  の  乗である。したがって、整数  $n > 1$  が  $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}$  と素因数分解されるとき、 $n$  の正の約数の個数は  である。たとえば 1320 の正の約数は  個ある。もし  $n$  の正の約数すべての積が  $n^2$  に等しいならば、 $n$  の正の約数の個数は  であり、このときの  $m$  は  または  である。

（東海大一医）

[入試演習 17]

各  $a_i$  は  $-1, 0, 1$  のいずれかの値をとるものとし、 $n$  個の数をならべたもの  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  を考える。いま、 $-n \leq r \leq n$  なる整数  $r$  に対して

$$r = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

となる  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  の個数を  $f_n(r)$  と書くことにする。例えば、 $n=2, r=1$  の場合は、 $(1, 0), (0, 1)$  の 2 個となるので  $f_2(1)=2$  となる。

(1)  $f_4(0)$  を求めなさい。

(2)  $n$  が 2 以上の場合に、 $f_n(n-2)$  を  $n$  の式で表したい。以下の空欄を埋めよ。

”まず、 $n-2 = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  となるためには  $a_1, a_2, \dots, a_n$  のなかで

1 をとるのは  個以上でなければならない。そのなかで、1 をとるのが

個の場合は起こらない。よって、つぎの 2 つの場合になる：

[a] 1 が  個で、残りの  個は 0 である。

[b] 1 が  個で、残りの  個は  $-1$  である。

[a] の場合は  通りあり、[b] の場合は  通りある。

従って、 $f_n(n-2) = \text{}$  である。”

(3)  $f_n(-r) = f_n(r)$  ( $r=1, 2, \dots, n$ ) であることは既知として、 $\left(x+1+\frac{1}{x}\right)^n$

を展開した式が

$$\frac{f_n(n)}{x^n} + \frac{f_n(n-1)}{x^{n-1}} + \dots + \frac{f_n(1)}{x} + f_n(0) + f_n(1)x + f_n(2)x^2 + \dots + f_n(n)x^n$$

となることを示しなさい。

(4)  $f_n(-r) = f_n(r)$  ( $r=1, 2, \dots, n$ ) を示しなさい。

(日本大一医)

[入試演習 18]

正の整数  $n, s$  と負でない整数  $r$  に対して、条件 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r \\ \text{かつ} \quad \cdots \cdots (*) \\ 0 \leq x_1, x_2, \cdots, x_n \leq s \end{cases}$$

を満たす整数の組  $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$  の総数を記号  ${}_n D_r$  で示すことにする。ただし、 $r > sn$  ならば  ${}_n D_r = 0$  と定める。たとえば、 $s=1$  のときは  $x_i (1 \leq i \leq n)$  が 0 または 1 となり、 ${}_n D_r$  は  $n$  個のものから  $r$  個を選ぶ選び方の総数と一致するので、二項係数  ${}_n C_r$  そのものである。

以下、 $s=2$  のとき、 ${}_n D_r$  のいくつかの性質を調べてみよう。

まず、 $n=1$  のとき、 ${}_1 D_0, {}_1 D_1, {}_1 D_2$  を求めると、この順に 1, 1,  となる。

次に、 $n=2$  のとき、 ${}_2 D_0, {}_2 D_1, {}_2 D_2, {}_2 D_3, {}_2 D_4$  は、この順に 1, 2, , , ,

であることがわかる。また、 ${}_n D_0 = \text{}$ ,  ${}_n D_1 = \text{}$  である。

次に、 $n \geq 3, r \geq 2$  のとき、(\*) において、 $x_n = 0$  を代入した場合の整数の組

$(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$  の総数は、 と表される。さらに、(\*) において、 $x_n = 1$  を代入し

た場合の整数の組  $(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$  の総数は、 と表され、 $x_n = 2$  を代入した場合

の整数の組  $(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$  の総数は、 と表される。ゆえに、 ${}_n D_r$  はこれらの

として表されるので、漸化式  ${}_n D_r = \text{}$  を得る。

ところで、(\*) を満たす整数の組  $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$  に対して、整数の組

$(\text{} - x_1, \text{} - x_2, \cdots, \text{} - x_n)$  は (\*) の  $r$  を  $2n - r$  とした条件を満たしてい

る。よって  ${}_n D_r = {}_n D_{2n-r}$  である。

さらに、 $x$  の  $2n$  次多項式  ${}_n D_0 + {}_n D_1 x + \cdots + {}_n D_{2n} x^{2n} \cdots (*)$

を因数分解することを考えてみよう。ただし、 $x$  のある多項式が因数分解できないときは、因数分解した形は、その多項式そのものと定める。まず  $n=1$  と  $n=2$  のとき、(\*) を因

数分解すると、それぞれ ,  を得る。これらのことから (\*) を因数分解する

と、 となることが数学的帰納法で示される。これに  $x=1$  を代入すると

${}_n D_0 + {}_n D_1 + \cdots + {}_n D_{2n} = \text{}$  が得られる。 (金沢医科大)

---

[演習－１]

放物線  $C: y = x^2 - ax$  ( $a$  は定数) 上の 2 点  $P, Q$  における接線で点  $A(0, -9)$  を通るものをそれぞれ  $l, m$  とする。ただし, 点  $P$  の  $x$  座標の方が点  $Q$  の  $x$  座標より大きいとする。次の問いに答えなさい。

- (1) 放物線  $C$  と接線  $l, m$  とで囲まれる図形の面積を求めなさい。
- (2)  $\angle PAQ$  が  $45^\circ$  となるように  $a$  の値を定めなさい。 (産業医科大)



[演習－2]

正三角形 $ABC$ の頂点上を点 $P$ が次の規則①, ②にしたがって移動する。

- ① 時刻0に $P$ は $A$ にいる。
- ② 1秒ごとに, $P$ は確率 $\frac{1}{4}$ で今いる頂点にとどまり, 等確率で今いる頂点以外の他の2頂点のどちらかに移動する。

$n$ 秒後に $P$ が $A$ にいる確率を $p_n$ とし,  $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ とするとき, 以下の各問いに答えよ。

- (1)  $p_n$ を用いて $p_{n+1}$ を表せ。
- (2)  $p_n$ を $n$ の式で表せ。
- (3)  $p$ の値を求めよ。
- (4) 不等式 $|p_n - p| < 5^{-20}$ を満たす最小の $n$ の値を求めよ。ただし必要ならば,  
 $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$  であることは用いてよい。 (日本医科大)

## はいふり 復習テスト

---

### 〔問題〕（I A 復習テスト）

students の8文字を1列に並べる。

- (1) 並べ方は何通りあるか。
- (2) s が隣り合わない並べ方は何通りあるか。
- (3) 同じ文字が隣り合わない並べ方は何通りあるか。
- (4) u がd より先に並ぶ並べ方は何通りあるか。
- (5) s, e, s が左からこの順に並ぶような並べ方は何通りあるか。

〔問題〕 (Ⅱ B 復習テスト)

$\triangle ABC$ の外心 $O$ から直線 $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ にひいた垂線の足をそれぞれ $P$ ,  $Q$ ,  $R$ とする。

$0 < t < 1$  の範囲で関係式  $(t+1)\overrightarrow{OP} + (t-1)\overrightarrow{OQ} - t(t+1)\overrightarrow{OR} = \vec{0}$  を満たしているとき,

(1) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ を $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ。

(2)  $\angle BAC$ の大きさを求めよ。

## はいふり 復習テスト

---

### [問題] (Ⅲ 復習テスト)

複素数 $\alpha, \beta$ は  $3\alpha^2 + 5\beta^2 - 6\alpha\beta = 0$  ,  $|\alpha + \beta| = 1$  をみたすとする。

- (1)  $\frac{\alpha}{\beta}$  を求めよ。
- (2)  $\arg\left(\frac{\beta - \alpha}{\beta}\right)$  を求めよ。
- (3)  $|\beta|$  を求めよ。
- (4) 複素数平面上で,  $0, \alpha, \beta$  を3頂点とする三角形の面積を求めよ。

---

**[追試－ I A]**

$a$  を実数の定数とする。

2つの関数  $f(x) = x^2 - ax + 3$  と  $g(x) = x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a$  について次の各問に答えよ。

- (1) すべての実数  $x$  について、 $f(x) \geq 0$  が成り立つための条件を  $a$  を用いて表せ。
- (2)  $1 \leq x \leq 3$  を満たすすべての実数  $x$  について、 $f(x) > 0$  が成り立つための条件を  $a$  を用いて表せ。
- (3)  $g(x) \leq 0$  を満たすすべての実数  $x$  について、 $f(x) > 0$  が成り立つための条件を  $a$  を用いて表せ。

[追々試－ I A]

$m$  を自然数とする。 $2^m!$  が  $2^n$  で割り切れる自然数  $n$  の最大値を  $N(m)$  とおくとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $N(5)$  を求めよ。
- (2)  $N(m)$  を  $m$  の式で表せ。
- (3)  $N(m)$  が素数ならば、 $m$  も素数であることを証明せよ。

[追っいつい試－ I A]

$\triangle ABC$ において、 $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ を $2:1$ ,  $3:2$ ,  $1:1$ に内分する点をそれぞれ $D$ ,  $E$ ,  $F$ とする。 $AE$ と $BF$ の交点 $P$ ,  $CD$ と $BF$ の交点 $Q$ ,  $AE$ と $CD$ の交点 $R$ とおく。

- (1)  $AR$ と $ER$ の比を求め、 $\triangle ARC$ と $\triangle ABC$ の面積比を求めよ。
- (2)  $\triangle PQR$ と $\triangle ABC$ の面積比を求めよ。

**[もう追わない試－ I A]**

1から9までの番号をつけた9枚のカードがある。

この中から無作為に4枚のカードを同時に取り出し、カードに書かれた4つの番号の積を  $X$  とおく。

- (1)  $X$  が5の倍数になる確率を求めよ。
- (2)  $X$  が10の倍数になる確率を求めよ。
- (3)  $X$  が6の倍数になる確率を求めよ。



[追試－ⅡB]

- (1) 曲線 $y=x^3$ と直線 $y=3x+a$ が異なる3点で交わるような $a$ の範囲を求めよ。
- (2)  $a$ が(1)の範囲を動くとき、3つの交点をA, B, Cとし、点 $(a, 4a)$ をDとする。  
3つの線分の長さの積  $DA \cdot DB \cdot DC$  の最大値を求めよ。

[追々試－ⅡB]

整式 $f(x)$  は $x+2$  で割ると余りが12,  $(x-1)^3$ で割ると余りが $x^2+3x+5$  である。

このとき, 次の問いに答えよ。

- (1)  $f(x)$  を  $(x-1)(x+2)$  で割った余りを求めよ。
- (2)  $f(x)$  を  $(x-1)^2$  で割った余りを求めよ。
- (3)  $f(x)$  を  $(x-1)^2(x+2)$  で割った余りを求めよ。

[追っついつい試－ⅡB]

点 $(5, 0)$ を通り、傾きが $a$ の直線が円 $x^2 + y^2 = 9$ と異なる2点 $P, Q$ で交わるとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $a$ の値の範囲を求めよ。
- (2)  $P$ と $Q$ の中点を $M$ とする。 $a$ を動かすとき、点 $M$ の軌跡を求めよ。

[もう追わない試－ⅡB]

(1) 実数 $x, y, a$ が $5^x = 7^y = 35^{a^2+2a+1}$ を満たすとする。

(i)  $x$ を $a$ を用いて表せ。

(ii)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$ を満たす $a$ の値を求めよ。

(2)  $a = \frac{3}{4}\log_8 9$ のとき、 $2^a$ を求めよ。

---

[追試－Ⅲ]

正の実数 $a, b, p$  に対して,  $A=(a+b)^p$  と  $B=2^{p-1}(a^p+b^p)$  の大小関係を調べよ。

---

[追々試－Ⅲ]

$xy$  平面上に中心  $(a, 0)$  をもつ半径  $a$  ( $a > 0$ ) の円  $C$  がある。円周上の動点  $P$  と原点  $O$  を通る直線上に、 $P$  に関して  $O$  の反対側に点  $Q$  を  $PQ = a$  となるようにとる。 $P$  が  $C$  上を動くときの点  $Q$  の軌跡を極方程式で求め、また、 $x$  軸および  $y$  軸の正の部分で囲まれた領域のうちで円  $C$  の外部にある部分の面積を求めよ。

[追っいつい試－Ⅲ]

第2次導関数をもつ関数 $f(x)$  が次の等式をみたしている。

$$f(x) = \sin x + \int_0^x f(x-t) \sin t \, dt$$

- (1)  $f(0)$  および,  $f'(0)$  を求めよ。
- (2)  $f(x)$  を求めよ。

[もう追わない試－Ⅲ]

$C: 4x^2 - y^2 = 1$  上の点  $P(x_1, y_1)$  における接線を  $l$  とする。 $l$  と  $C$  の漸近線との交点を  $A$ ,  $B$  とする。また,  $OP$  を直径とする円と漸近線との交点を  $Q$ ,  $R$  とする。

- (1)  $l$  を求めよ。
- (2)  $P(x_1, y_1)$  は線分  $AB$  の中点であることを示せ。
- (3)  $\triangle OAB$  の面積  $S$  は  $P$  によらないことを示せ。
- (4)  $PQ \times PR$  は  $P$  によらないことを示せ。